Corrado Malanga - Luciano Pederzoli

SST- SuperSpin Theory

TEORIA DEL SUPERSPIN

PARTE PRIMA

RELAZIONI DIMENSIONALI ED INDETERMINAZIONE

Rev. 1.0 - 27 novembre 2003
Rev. 1.0.1 - 10 marzo 2004

Lavoro originale registrato in data:
01 dicembre 2003

PRESENTAZIONE DELLA *SST - PRIMA PARTE*

Quando, ed è il nostro caso, non è possibile accedere a fonti di sostanziosi finanziamenti per le proprie ricerche, la prima domanda che ci si pone è:

Come si può fare, senza disporre di fondi adeguati, ad eseguire la lunghissima serie di costosi esperimenti che potrebbero portare a nuove scoperte?

La risposta, a ben vedere, è una sola:

Si utilizzano gli esperimenti già eseguiti tante volte da fornire risultati assolutamente certi e se ne cercano nuove interpretazioni, ferma restando la validità di tutto ciò che da tali esperimenti è stato finora ufficialmente dedotto, ma senza dimenticare che è tanto probabile da essere praticamente certo il fatto che la realtà si estenda ben al di là degli ambiti finora esplorati.

Gli esperimenti fondamentali sono tutti riportati in letteratura e da essi sono state ricavate le poche grandezze fondamentali che consentono di misurare, quindi utilizzare, tutto ciò che conosciamo.
La sintesi è rappresentata dai cosiddetti Sistemi di Misura, dei quali uno (il Sistema Internazionale) si è ormai imposto come standard mondiale da più di quarant'anni.

Non è per niente detto, tuttavia, che si debbano necessariamente utilizzare le unità fondamentali di quel Sistema di Misura, anzi, un utile ed economico (in termini pecuniari, non temporali) esperimento consiste proprio nel sostituire tali unità, ricavandone una nuova descrizione della realtà a noi nota.
È vero che la nuova descrizione non può contenere nulla di effettivamente nuovo rispetto a quella da cui è stata ricavata, ma è anche vero che essa descrive la realtà da un altro punto di vista, quindi può suggerire nuove interpretazioni o far nascere idee originali.
La **SST (SuperSpin Theory) - Parte Prima** presenta i risultati di uno di tali esperimenti e le idee innovative che ne sono scaturite, le quali danno origine ad una descrizione della realtà più ampia di quella attualmente accettata.
Rispetto a tale visione la descrizione attuale rappresenta solo un caso particolare, sia pure ineccepibilmente corretto.

α) RELAZIONI DIMENSIONALI INASPETTATE

[nel testo questa grafia è riservata all'analisi dimensionale ed ai relativi commenti]

Le equazioni dimensionali stabiliscono le relazioni esistenti tra le grandezze che compaiono in una formula fisica, prescindendo da eventuali costanti adimensionali; notoriamente il rispetto delle equazioni dimensionali è la prima regola da rispettare quando si applicano leggi fisiche.
I Sistemi di Misura, a loro volta, rappresentano quanto di più consolidato ed unanimemente accettato esiste nel campo tecnico-scientifico.
Confrontando i Sistemi di Misura antecedenti e successivi al 1960, ed in particolare l'attuale Sistema Internazionale (SI), di uso generale, con il suo predecessore più importante, il Sistema CGS elettrostatico, che era stato utilizzato per più di ottant'anni (tra l'altro anni importantissimi per la fisica e per le telecomunicazioni), si scopre che la differenza fondamentale, e la più ricca di conseguenze, consiste nella diversa definizione che i due Sistemi di Misura danno della carica elettrica.

Per il vecchio Sistema CGS elettrostatico la carica elettrica è stazionaria ed ha dimensioni:

$$\alpha\text{-01)}\quad [l^{3}\, m\;\; t^{-2}]^{1/2}$$

NOTA α-α

La legge di Coulomb, infatti, dice che:

$$\mathbf{F = c_q * (Q_1 * Q_2)/r^2}$$

in cui $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ sono cariche elettriche puntiformi,
$\mathbf{c_q}$ è una costante che, nel Sistema CGS, viene assunta pari ad 1
r è la distanza che divide le cariche ed
F la forza con cui si attraggono o si respingono, a seconda dei loro segni.
Assumendo che le due cariche siano uguali, si ha, pertanto:

$$\mathbf{F = Q^2/r^2}$$

dalla quale si ricava:

$$\mathbf{Q = (F * r^2)^{1/2}}$$

oppure, essendo $\mathbf{F = m * a}$, anche la:

$$\mathbf{Q = (m * a * r^2)^{1/2}}\,,$$

le cui dimensioni sono, appunto: $[l^{3}\, m\;\; t^{-2}]^{1/2}$

Per il Sistema Internazionale, invece, la carica è in movimento ed ha dimensioni:

$$\alpha\text{-02)}\quad [t\; i]$$

Uguagliando, con passaggi non banali, le due cariche e, di conseguenza, anche le relative espressioni dimensionali, si ottiene la:

$$\alpha\text{-03)}\quad i = [l^{3/2}\, m^{1/2}\, t^{-2}] = [l^{3}\, m\; t^{-4}]^{1/2}$$

Introducendo questa espressione dimensionale in luogo della corrente **i** del Sistema Internazionale nasce la seguente TABELLA α-a, che riporta soltanto le grandezze di maggior interesse per questo lavoro (in color ciclamino appaiono le dimensioni ricavate mediante la sostituzione).

TABELLA α-a

SISTEMA INTERNAZIONALE MODIFICATO	
Grandezza	**Dimensioni**
l = lunghezza	$[l]$
t = tempo	$[t]$
m = massa	$[m]$
f = frequenza	$[t^{-1}]$
v = velocità	$[l\,t^{-1}]$
a = accelerazione	$[l\,t^{-2}]$
F = forza **= m*a**	$[l\,m\,t^{-2}]$
U = energia	$[l^2\,m\,t^{-2}]$
P = potenza	$[l^2\,m\,t^{-3}]$
i = corrente elettrica (SI) **i =** corrente el. (dal CGS)	$[i]$ $[l^3\,m\,t^{-4}]^{1/2}$
ε₀ = costante dielettrica	$[l^{-3}\,m^{-1}\,t^4\,i^2]$ 1 (val. tipico CGS)
μ₀ = permeabilità assoluta **$\mu_0 = 1/v^2$**	$[l\,m\,t^{-2}\,i^{-2}]$ $[l\,t^{-1}]^{-2}$
G = cost. di gravitazione	$[l^3\,m^{-1}\,t^{-2}]$
h = cost. di Planck **$H = Q^2/v = \Phi^2 * v$**	$[l^2\,m\,t^{-1}]$
K = intensità del campo elettrico	$[l\,m\,t^{-3}\,i^{-1}]$ $[l^{-1}\,m\,t^{-2}]^{1/2}$
H = intensità del campo magnetico	$[l^{-1}\,i]$ $[l\,m\,t^{-4}]^{1/2}$
Q = flusso elettrico (carica elettrica) **Q^2 = Energia * Lunghezza**	$[t\,i]$ $[l^3\,m\,t^{-2}]^{1/2}$ $[l^3\,m\,t^{-2}]$
Φ = flusso magnetico **$\Phi = Q/v$** **Φ^2 = Spazio * Massa**	$[l^2\,m\,t^{-2}\,i^{-1}]$ $[l\,m]^{1/2}$ $[l\,m]$

La sostituzione consente già di intravedere relazioni tra elettricità, magnetismo, spazio, tempo, massa ed energia, ma **proviamo a vedere cosa succede se si adotta, come grandezza fondamentale, l'energia invece della massa.**

Si ottiene la seguente TABELLA α-b (chiameremo il nuovo Sistema di misura “**S-T-U**”, da **S** = Spazio, **T** = Tempo ed **U** = Energia):

TABELLA α-b

SISTEMA S-T-U		
Grandezza	Note e passaggi	**Dimensioni**
l = lunghezza (Spazio monodimensionale)		$[l]$
t = tempo	**(1/f = T = periodo)**	$[t]$
U = energia		$[u]$
m = massa	Dalla **$U = m{*}v^2/2$** deriva la **$m = 2U/v^2$**	$[l^{-2}\ t^{2}\ u]$
f = frequenza	**1/T = f =** frequenza	$[t^{-1}]$
V = volume		$[l^{3}]$
v = velocità		$[l\ t^{-1}]$
a = accelerazione		$[l\ t^{-2}]$
F = forza = **m*a**	$[l\ m\ t^{-2}] = [l\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-2}]$	$[l^{-1}\ u]$
P = potenza	$[l^{2}\ m\ t^{-3}] = [l^{2}\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-3}]$	$[t^{-1}\ u]$
h = cost. di Planck	$[l^{2}\ m\ t^{-1}] = [l^{2}\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-1}]$	$[t\ u]$
μ_0 = permeabilità assoluta		$[l^{-2}\ t^{2}]$
ε_0 = cost. dielettrica		1
G = cost. di gravitazione	$[l^{3}\ m^{-1}\ t^{-2}] = [l^{3}\ l^{2}\ t^{-2}\ u^{-1}\ t^{-2}]$	$[l^{5}\ t^{-4}\ u^{-1}]$
i = corrente elettrica	$[l^{3}\ m\ t^{-4}]^{1/2} = [l^{3}\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-4}]^{1/2}$	$[l\ t^{-2}\ u]^{1/2}$
Q = carica elettrica	$[l^{3}\ m\ t^{-2}]^{1/2} = [l^{3}\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-2}]^{1/2}$	$[l\ u]^{1/2}$
K = intens. campo elettrico	$[l^{-1/2}\ m^{1/2}\ t^{-1}] = [l^{-1/2}(l^{-2}\ t^{2} u)^{1/2}\ t^{-1}]$	$[l^{-3}\ u]^{1/2}$
Φ = flusso magnetico	$[l\ m]^{1/2} = [l\ l^{-2}\ t^{2}\ u]^{1/2}$	$[l^{-1}\ t^{2}\ u]^{1/2}$
H = intens. campo magn.	$[l\ m\ t^{-4}]^{1/2} = [l\ l^{-2}\ t^{2}\ u\ t^{-4}]^{1/2}$	$[l^{-1}\ t^{-2}\ u]^{1/2}$

Naturalmente le espressioni dimensionali elencate nella colonna di destra non contengono più riferimenti alla massa, ma solamente a lunghezza, tempo ed energia.
Tutte contengono piccoli valori di elevazione a potenza delle suddette tre grandezze, a parte la costante di gravitazione.

Dalla TABELLA α-b è possibile ricavare la TABELLA α-c, la quale, partendo dalle espressioni di **Q**, **K**, **Φ** ed **H** appena ricavate ed esaminandone tutti i prodotti ed i rapporti, nonché, più avanti, alcune altre combinazioni, mette in luce relazioni inaspettate tra carica elettrica, intensità di campo elettrico, flusso magnetico, intensità di campo magnetico, tempo, energia, forza, potenza, lunghezza, volume e massa.

TABELLA α-c

Grandezze		Passaggi	Dimensioni
Q	Lunghezza $\ast$ Forza$^{1/2}$	$[l]\,[l^{-1}\,u]^{1/2}$	$[l\,u]^{1/2}$
K	Lunghezza^{-1} $\ast$ Forza$^{1/2}$	$[l]^{-1}[l^{-1}\,u]^{1/2}$	$[l^{-3}\,u]^{1/2}$
Φ	Tempo $\ast$ Forza$^{1/2}$	$[l\,u]^{1/2}\,[l\,t^{-1}]^{-1}$	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}$
H	Tempo^{-1} $\ast$ Forza$^{1/2}$	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}\,[t]^{-2}$	$[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{1/2}$
$Q^2 = Q \ast Q$	Energia $\ast$ Lunghezza	$[l]\,[u]$	$[l\,u]$
$K^2 = K \ast K$	Forza / Lungh.^{2}	$[u]\,[l]^{-3}$	$[l^{-3}\,u]$
$\Phi^2 = \Phi \ast \Phi$	Forza $\ast$ Tempo^2	$[l\,u]\,[l\,t^{-1}]^{-2}$	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]$
$H^2 = H \ast H$	Forza / Tempo^2	$[l^{-1}\,u]\,[t]^{-2}$	$[l^{-1}\,t^{-2}\,u]$
$Q \ast K$	Energia / Lungh. = F	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-3}\,u]^{1/2}$	$[l^{-1}\,u]$
$Q \ast \Phi$	Tempo $\ast$ Energia = h	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}$	$[t\,u]$
$Q \ast H$	Energia / Tempo = P	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{1/2}$	$[t^{-1}\,u]$
$K \ast \Phi$	Potenza / Velocità^2	$[l^{-3}\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}$	$[l^{-2}\,t\,u]$
$K \ast H$	Potenza / Lungh.^{2}	$[l^{-3}\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{1/2}$	$[l^{-2}\,t^{-1}\,u]$
$\Phi \ast H$	Energia / Lungh. = F	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{1/2}$	$[l^{-1}\,u]$
Q / K	Lunghezza^2	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-3}\,u]^{-1/2}$	$[\,l\,]^{2}$
Q / Φ	Lungh. / Tempo = v	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{-1/2}$	$[l\,t^{-1}]$
Q / H	Lunghezza $\ast$ Tempo	$[l\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{-1/2}$	$[l\,t]$
Φ / K	Lunghezza $\ast$ Tempo	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}\,[l^{-3}\,u]^{-1/2}$	$[l\,t]$
K / H	Tempo / Lungh.= 1/v	$[l^{-3}\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{-1/2}$	$[l^{-1}\,t]$
Φ / H	Tempo^2	$[l^{-1}\,t^{2}\,u]^{1/2}\,[l^{-1}\,t^{-2}\,u]^{-1/2}$	$[\,t\,]^{2}$
$K \ast Q^3$	Energia^2	$[l^{-3}\,u]^{1/2}\,[l\,u]^{3/2}$	$[\,u\,]^{2}$
Q / T	i = corr. elettrica	$[l\,u]^{1/2}\,[t]^{-1}$	$[l\,t^{-2}\,u]^{1/2}$
$m \ast a$	Energia / Lungh. = F	$[u]\,[l]^{-1}$	$[l^{-1}\,u]$
μ_0	Tempo / Lungh.= 1/v^2	$[l^{-2}\,t^{2}\,u]\,[u]^{-1}$	$[l^{-1}t]^{2}$
ε_0	Numero puro	1	1

Si noti che alcune espressioni sono equivalenti. Ad esempio:

α-04) $\mathbf{\Phi \ast H = Q \ast K = m \ast a = F}$

od anche:

α-05) $\mathbf{Q/\Phi = H/K = v}$

Non c'è bisogno di sottolineare l'esistenza di relazioni significative tra lunghezza (spazio), tempo, energia, carica elettrica, intensità del campo elettrico, flusso magnetico ed intensità del campo magnetico. È evidente, invece, l'utilità di approfondire tali relazioni, sia dal punto di vista teorico sia da quello sperimentale.

Ad esempio ci sono tre espressioni della forza, rispettivamente in funzione della carica elettrica **Q**, del flusso magnetico **Φ** e della massa **m**:

α-06) $\mathbf{F = Q{*}K}$
α-07) $\mathbf{F = \Phi{*}H}$
α-08) $\mathbf{F = m{*}a}$

Da esse si arguisce che carica elettrica **Q**, flusso magnetico **Φ** e massa **m** sono tra di loro equivalenti, rappresentando le sorgenti dei rispettivi campi, infatti, come si è già detto, si definiscono "**K**" l'intensità del Campo Elettrico, "**H**" l'intensità del Campo Magnetico ed "**a**" l'intensità del Campo Gravitazionale (non per nulla è noto a tutti che l'accelerazione di gravità, sulla superficie terrestre, è pari a circa 9,81 m/s^2).
Dimensionalmente "**a**" vale:

$$[\,l\; t^{-2}]$$

Ma, essendo:

Φ/H	$[\,t\,]^2$

e:

Q/K	$[\,l\,]^2$

ne consegue che, sempre in termini dimensionali, è vera la:

α-09) **a = intensità del Campo Gravitazionale** $= [\,l\; t^{-2}] = [\,i^{2}\; u^{-1}] = \mathbf{(Q/K)^{1/2} * (H/\Phi)}$

Come si è visto, dalla $\mathbf{U = \frac{1}{2}\, m{*}v^2}$ (oppure dalla $\mathbf{U = m{*}c^2}$) si ricava che, in termini dimensionali, $\mathbf{m = U/v^2}$, ovvero:

$$[\,l^{-2}\; t^{2}\; u\,]$$

Ma, poiché:

$[\,l\,]^2$	**Q / K**
$[\,t\,]^2$	**Φ / H**
$[\,u\,]^2$	$\mathbf{K * Q^3}$

ne consegue:

α-10) $\mathbf{m} = [\,l^{-2}\; t^{2}\; u\,] = \mathbf{K/Q * \Phi/H * (K{*}Q^3)^{1/2} = (\Phi/H) * (K^3{*}Q)^{1/2}}$

Tuttavia valgono anche le :

$[\,l\,]^{-1}$	$\mathbf{(K / Q)^{1/2}}$
$[l^{-1}\; t^{2}\; u]$	$\mathbf{\Phi^2}$

da cui deriva la più maneggevole:

α-11) **m = massa** $= [\,l^{-2}\; t^{2}\; u\,] = \mathbf{\Phi^2 * (K/Q)^{1/2}}$

Dalla α-05) si ha, poi, **Q/Φ = H/K= v** , quindi anche una nuova espressione della massa:

α-11) **m = massa** $= [\,l^{-2}\; t^{2}\; u\,] = \mathbf{(K/H)^2 * Q * (K{*}Q)^{1/2}}$

La verifica effettuata sul prodotto **m * a** porta, in ambedue i casi, al medesimo risultato (**F**):

α-12) $\mathbf{m * a = \Phi^2 * (K/Q)^{1/2} * (Q/K)^{1/2} * (H/\Phi) = \Phi{*}H = F}$
α-13) $\mathbf{m * a = (K/H)^2 * Q * (K{*}Q)^{1/2} * (Q/K)^{1/2} * (H/\Phi) = (K^2{*}Q^2) / (H{*}\Phi) = F^2/F = F}$

Sono particolarmente interessanti le relazioni riportate nella seguente TABELLA α-d:

TABELLA α-d

$(Q / K)^{1/2}$	$[\, l \,]$	$[l^{1/2}\, u^{1/2}]^{1/2}\, [l^{3/2}\, u^{-1/2}]^{1/2}$	**Lunghezza**
$(\Phi / H)^{1/2}$	$[\, t \,]$	$[l^{-1/2}\, t\, u^{1/2}]^{1/2} [l^{1/2}\, t\, u^{-1/2}]^{1/2}$	**Tempo**
$Q * (K * Q)^{1/2}$	$[\, u \,]$	$[l^{-3/2}\, u^{1/2}]^{1/2}\, [l^{3/2}\, u^{3/2}]^{1/2}$	**Energia**
$\Phi^2 * (K / Q)^{1/2}$	$[\, l^{-2}\, t^2\, u \,]$	$[l^{-1}\, t^2\, u]\, [\, l \,]^{-1}$	**Massa**
$(Q/K)^{1/2} * (H/\Phi)$	$[\, l\, t^{-2}]$	$[\, l \,][\, t \,]^{-2}$	**Accelerazione**
Q	$[\, l\, u \,]^{1/2}$	$[l]\, [l^{-1}\, u]^{1/2}$	**Lunghezza * Forza$^{1/2}$**
K	$[\, l^{-3}\, u \,]^{1/2}$	$[l]^{-1}\, [l^{-1}\, u]^{1/2}$	**Lunghezza^{-1} * Forza$^{1/2}$**
Φ	$[\, l^{-1}\, t^2\, u \,]^{1/2}$	$[t]\, [l^{-1}\, u]^{1/2}$	**Tempo * Forza$^{1/2}$**
H	$[\, l^{-1}\, t^{-2}\, u]^{1/2}$	$[t]^{-1}\, [l^{-1}\, u]^{1/2}$	**Tempo^{-1} * Forza$^{1/2}$**
Q^2 (= $Q*Q$)	$[\, l\, u \,]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l\, u]^{1/2}$	**Energia * Lunghezza**
$Q * \Phi$	$[\, t\, u \,]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l^{-1}\, t^2\, u]^{1/2}$	**Tempo * Energia = h**
Q / H	$[\, l\, t \,]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l^{-1}\, t^{-2}\, u]^{-1/2}$	**Lunghezza * Tempo**
Φ / K	$[\, l\, t \,]$	$[l^{-1}\, t^2\, u]^{1/2}\, [l^{-3}\, u]^{-1/2}$	**Lunghezza * Tempo**
$\Phi * H$	$[\, l^{-1}\, u \,]$	$[l^{-1}\, t^2\, u]^{1/2}\, [l^{-1}\, t^{-2}\, u]^{1/2}$	**Energia / Lungh. = F**
$Q * K$	$[\, l^{-1}\, u \,]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l^{-3}\, u]^{1/2}$	**Energia / Lungh. = F**
Q / Φ	$[\, l\, t^{-1}]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l^{-1}\, t^2\, u]^{-1/2}$	**Lungh. / Tempo = v**
$Q * H$	$[\, t^{-1}\, u \,]$	$[l\, u]^{1/2}\, [l^{-1}\, t^{-2}\, u]^{1/2}$	**Energia / Tempo = P**

Si noti che:

α-14) **Lunghezza** $= (Q / K)^{1/2}$ **Natura puramente elettrica**
α-15) **Tempo** $= (\Phi / H)^{1/2}$ **Natura puramente magnetica**
α-16) **Massa** $= \Phi^2 * (K/Q)^{1/2}$ **Natura elettromagnetica**

Mentre l'Energia si presenta in tre forme (**a** è l'accelerazione):

α-17) **Energia** $= Q * (Q * K)^{1/2}$ **Natura elettrica**
α-18) **Energia** $= Q * (\Phi * H)^{1/2}$ **Natura elettromagnetica**
α-19) **Energia** $= \Phi^2 * a$ **Natura magneto-meccanica**

Dalla α-19) **si deduce che è possibile produrre energia accelerando un flusso magnetico**: per fare un esempio pratico si può estrarre energia elettrica facendo ruotare sul proprio asse un magnete permanente a forma di disco magnetizzato assialmente (la classica esperienza del cosiddetto **Disco di Faraday**, nella quale la rotazione sottopone ad accelerazione radiale un magnete permanente discoidale e l'energia elettrica viene prelevata tra l'asse e la periferia del disco stesso).

È BENE RICORDARE, INFINE, CHE IL PRODOTTO $Q * \Phi$ HA LE STESSE DIMENSIONI $[\, t\, u \,]$ DEL MOMENTO ANGOLARE INTRINSECO DI UNA PARTICELLA, LA CUI UNITÀ È $h/(2*\pi)$. Mediante tale unità si misura lo **SPIN** (che può assumere valori pari a 0 ± ½, ± 1, ± 2, ecc.).

β) IL PRINCIPIO D'INDETERMINAZIONE MP

[nel testo questa grafia è riservata all'analisi dimensionale ed ai relativi commenti]

N.B.: *Tutte le* **ĉ** *utilizzate nel testo sono costanti adimensionali, che non influiscono sul comportamento qualitativo delle formule, ma servono solamente per tener conto delle unità di misura adottate.*

Riprendiamo la TABELLA α-a del paragrafo precedente:

TABELLA α-a

SISTEMA INTERNAZIONALE MODIFICATO	
Grandezza	**Dimensioni**
l = lunghezza	$[l]$
t = tempo	$[t]$
m = massa	$[m]$
i = corrente elettrica (SI) **i** = corrente elettr. (CGS)	$[i]$ $[l^3\, m\, t^{-4}]^{1/2}$
f = frequenza	$[t^{-1}]$
V = volume	$[l^3]$
v = velocità	$[l\, t^{-1}]$
a = accelerazione	$[l\, t^{-2}]$
F = forza = **m∗a**	$[l\, m\, t^{-2}]$
U = energia	$[l^2\, m\, t^{-2}]$
P = potenza	$[l^2\, m\, t^{-3}]$
ε_0 = costante dielettrica	$[l^{-3}\, m^{-1}\, t^4\, i^2]$ *1* (val. tipico CGS)
μ_0 = permeabilità assoluta $\mu_0 = 1/v^2$	$[l\, m\, t^{-2}\, i^{-2}]$ $[l\, t^{-1}]^{-2}$
G = cost. di gravitazione	$[l^3\, m^{-1}\, t^{-2}]$
K = intensità del campo elettrico	$[l\, m\, t^{-3}\, i^{-1}]$ $[l^{-1}\, m\, t^{-2}]^{1/2}$
H = intensità del campo magnetico	$[l^{-1}\, i]$ $[l\, m\, t^{-4}]^{1/2}$
Q = flusso elettrico (carica elettr.) **Q^2 = Energia∗Lunghezza**	$[t\, i]$ $[l^3\, m\, t^{-2}]^{1/2}$ $[l^3\, m\, t^{-2}]$
Φ =flusso magnetico **Φ = Q/v** **Φ^2 = Spazio∗Massa**	$[l^2 m\, t^{-2}\, i^{-1}]$ $[l\, m]^{1/2}$ $[l\, m]$
h = cost. di Planck = **= $Q^2/v = \Phi^2 * v$**	$[l^2\, m\, t^{-1}]$

Heisemberg, con il suo principio di indeterminazione, afferma che:

$$\beta\text{-01)}\ \mathbf{\Delta_T * \Delta_U \geq h/(4*\pi)}$$

con **h** = costante di Planck.

Il principio stabilisce l'incertezza **h/(4*π)** nella determinazione simultanea dell'energia che una particella possiede e dell'istante temporale in cui la possiede: se si riduce a zero l'incertezza temporale, l'altra incertezza diventa di ampiezza infinita, rendendo impossibile la determinazione dell'energia della particella nell'istante prescelto.
Naturalmente il principio consente anche di invertire la situazione, rendendo impossibile la determinazione dell'istante in cui la particella possiede quell'esatta energia che è stata "prefissata".

La $\mathbf{\Delta_T * \Delta_U = h/(4*\pi)}$ viene spesso scritta in un altro modo:

$$\beta\text{-02)}\ \mathbf{\Delta_x * \Delta_p \geq h/(4*\pi) = \hbar/2}$$

con **x** = posizione, **p** = quantità di moto (**m*v**) ed **ħ** = **h/(2*π)**.

In questa forma l'indeterminazione $\mathbf{\Delta_X * \Delta_p}$ rappresenta l'incertezza nella definizione contemporanea della posizione che una particella ha e della quantità di moto (il prodotto tra massa e velocità della particella stessa) che essa possiede in quella posizione.

Invece che:

$$\beta\text{-03)}\ \mathbf{\Delta_X * \Delta_p \geq h/(4*\pi)}$$

si potrebbe scrivere:

$$\beta\text{-04)}\ \mathbf{\Delta_x * \Delta_m * \Delta_v \geq h/(4*\pi)}$$

Espressione che implica l'incertezza nella definizione contemporanea della posizione **x**, della massa **m** e della velocità **v** della particella.

La presenza o l'assenza di **(4*π)** al denominatore del secondo termine delle precedenti disequazioni dipende dalle convenzioni relative al sistema di misura adottato, ma per il nostro scopo non è significativa, poiché siamo interessati esclusivamente al significato dimensionale del principio di indeterminazione di Heisemberg: pertanto d'ora in poi scriveremo $\mathbf{\Delta_X * \Delta_p \geq \hat{c}_h * h}$
Si noti che l'equazione $\mathbf{\Delta_T * \Delta_U = \hat{c}_h * h}$ è del tipo **x*y = costante**, che rappresenta un'iperbole equilatera in un piano cartesiano del quale **T** (Tempo) ed **U** (Energia) siano gli assi coordinati. Di conseguenza si può dire che il principio implica l'esistenza di tali assi, tant'è vero che, ricorrendo ad essi, si ottiene una sua semplice rappresentazione grafica, come luogo dei punti che stanno oltre una curva limite costituita dall'iperbole stessa.

L'equazione β-04) mette in luce, tuttavia, l'importanza della posizione (lunghezza, ovvero spazio), della massa e della velocità (lunghezza/tempo). Complessivamente: spazio, tempo e massa. Ricordiamo, però, che massa ed energia, secondo Einstein, sono legate dalla:

$$\beta\text{-05)}\ \mathbf{U = m*c^2}$$

con **U** = energia, **m** = massa e **c** = velocità della luce nel vuoto (la classica energia cinetica vale **U = ½ m*v^2**, che è dimensionalmente equivalente alla β-05).
Considerando la β-01) e la β-04) è lecito ritenere che gli assi cartesiani coinvolti non siano solo due (Tempo ed Energia), ma ne esista anche un terzo, quello delle Lunghezze, cioè dello Spazio.

Introduciamo, quindi, **l'ipotesi secondo la quale il principio di indeterminazione di Heisemberg rappresenta solamente la versione bidimensionale di un principio di indeterminazione più generale** (tridimensionale)**: di conseguenza, agli assi coordinati T ed U aggiungeremo, in un sistema cartesiano tridimensionale, l'asse spaziale S.**

Le espressioni β-01) e β-04), qui ripetute con l'introduzione di $\hat{c}_h$:

β-01) $\Delta_T * \Delta_U \geq \hat{c}_h * h$

β-04) $\Delta_x * \Delta_U * \Delta_{S/T} \geq \hat{c}_h * h$

Dimensionalmente valgono: $[\,l^2 m\, t^{-1}\,]$.

Nel nuovo sistema di coordinate ortogonali **S**, **T** ed **U** nascono, pertanto, tre principi di indeterminazione **PARTICOLARI** (bidimensionali), uno per ciascuna coppia di assi coordinati (il primo è il classico principio di indeterminazione di Heisemberg). Infatti, posti:

β-06) $\Delta_U = \Delta_{Energia}$ $\quad [\,l^2 m\, t^{-2}\,]$
β-07) $\Delta_T = \Delta_{Tempo}$ $\quad [\,t\,]$
β-08) $\Delta_S = \Delta_{Spazio}$ $\quad [\,l\,]$

dal punto di vista dimensionale i tre principi suddetti sono:

β-09) $\Delta_U * \Delta_T = \Delta_{Energia} * \Delta_{Tempo}$ $\quad [\,l^2 m\, t^{-2}\,][\,t\,] = [\,l^2\, m\, t^{-1}\,]$ (Heisemberg)
β-10) $\Delta_T * \Delta_S = \Delta_{Tempo} * \Delta_{Spazio}$ $\quad [\,t\,][\,l\,] = [\,l\, t\,]$
β-11) $\Delta_U * \Delta_S = \Delta_{Energia} * \Delta_{Spazio}$ $\quad [l^2 m\, t^{-2}][\,l\,] = [\,l^3\, m\, t^{-2}]$

Ma si può anche affermare che:

β-12) $\Delta_U \quad [\,l^2 m\, t^{-2}\,] = [\,l^2 m\, t^{-1}\,][\,t^{-1}\,] \quad \geq \hat{c}_U * h * f$

Cioè si può dire che **l'incertezza dell'Energia è proporzionale ad una frequenza** (**f**).

Allora perché Δ_T non deve essere proporzionale (secondo una costante che chiameremo $\hat{c}_T$) ad un periodo (**T**) e Δ_S (secondo una costante che chiameremo $\hat{c}_S$) ad una lunghezza d'onda (**λ**)?
La lunghezza d'onda vale **velocità/frequenza**.
Di conseguenza: **λ = v/f = v*f^{-1}**, con **v = velocità**.
Se ne ricava la terna di equazioni (la prima è ripetuta per comodità):

β-12) Δ_U	$[l^2 m t^{-2}]$	**h ⋆ frequenza**	**≥ ĉ$_U$⋆h⋆f**	**= ĉ$_U$⋆h⋆f**
β-13) Δ_T	$[t]$	**periodo**	**≥ ĉ$_T$⋆T**	**= ĉ$_T$⋆f^{-1}**
β-14) Δ_S	$[l]$	**lunghezza d'onda**	**≥ ĉ$_S$⋆λ**	**= ĉ$_S$⋆v⋆f^{-1}**

La β-12) ha le dimensioni della classica relazione **U = h⋆f** , che esprime l'energia del fotone, ma vale anche $[l^2 m t^{-2}] = [m][l t^{-1}]^2$, con le dimensioni dell'altrettanto nota **U = m⋆c^2**, essendo, appunto, $[l t^{-1}]$ una **velocità.**

NOTA β-α

Ammettiamo che, per la medesima particella **(FOTONE)**, valgano ambedue le:

$$E = m \cdot c^2 \quad \text{ed} \quad E = h \cdot f$$

Uguagliandole, si ottiene:

$$m \cdot c^2 = h \cdot f$$

da cui si ricava:

$$m = (h / c^2) \cdot f \quad [l^2 m t^{-1}][l t^{-1}]^{-2}[t^{-1}] = [m]$$

Si deduce che **la massa di un fotone è proporzionale alla sua frequenza**.
Infatti: **f** ⋆ 6,626 ⋆10^{-34} / 9 ⋆ 10^{16} = **f ⋆ 0,7362 ⋆ 10^{-50} Kg**
Per esempio, ad 1 GHz, la massa vale 0,7362 ⋆ 10^{-41} Kg

Δ_S , Δ_T e Δ_U possono essere interpretate come LE TRE GRANDEZZE CHE DEFINISCONO UNA PARTICELLA NEL DOMINIO S-T-U (Spazio-Tempo-Energia) e si può affermare che:

Δ_U è proporzionale ad una frequenza,
Δ_T è proporzionale ad un periodo,
Δ_S è proporzionale ad una lunghezza d'onda.

Facendo il prodotto delle dimensioni di **Δ_S , Δ_T** e **Δ_U** si ottiene:

β-15) **$\Delta_S \cdot \Delta_T \cdot \Delta_U$** $\quad [l][t][l^2 m t^{-2}] = [l^3 m t^{-1}]$

Dalle β-09), β-10) e β-11) si ricavano, poi, questi rapporti, caratteristici del dominio S-T-U:

β-16) **Δ_S/Δ_T**	**velocità**	$[l t^{-1}]$
β-17) **Δ_U/Δ_S**	**forza**	$[l m t^{-2}]$
β-18) **Δ_U/Δ_T**	**potenza**	$[l^2 m t^{-3}]$

Aggiungendo le β-08), β-09) e β-10) abbiamo tutte le relazioni tipiche del dominio S-T-U:

β-06) **$\Delta_U \cdot \Delta_T$**	**h**	$[l^2 m t^{-1}]$	**momento angolare intrinseco**
β-07) **$\Delta_T \cdot \Delta_S$**		$[l t]$	
β-08) **$\Delta_U \cdot \Delta_S$**	**Q^2**	$[l^3 m t^{-2}]$	**(carica elettrica)^2**

I prodotti $\Delta_U{*}\Delta_S$, $\Delta_U{*}\Delta_T$, $\Delta_T{*}\Delta_S$, come indicano i loro pedici, riguardano, rispettivamente, i "piani" **U-S**, **U-T** e **T-S** e, su di essi, definiscono vere e proprie aree, la cui "superficie" è definita dal prodotto di due **Δ**. La loro radice quadrata è proporzionale al "raggio" di tali aree, se queste vengono pensate come circolari, od al "lato", se si suppongono quadrate.
Il quadro completo delle relazioni risultanti da quanto finora esposto nei paragrafi α) e β) è il seguente:

β-19) $\Delta_S{*}\Delta_T{*}\Delta_U$	$[\,l\ t\ u\,]$	$=[\,l^3 m\ t^{-1}]$	$= Q^2{*}(\Phi/H)^{1/2}$	
β-20) $\Delta_U{*}\Delta_T$	$[\,t\ u\,]$	$=[\,l^2\ m\ t^{-1}]$	$= Q{*}\Phi$	**h (momento angol. intrins.)**
β-21) $\Delta_T{*}\Delta_S$	$[\,l\ t\,]$	$=[\,l\ t\,]$	$= \Phi/K = Q/H$	
β-22) $\Delta_U{*}\Delta_S$	$[\,l\ u\,]$	$=[\,l^3\ m\ t^{-2}]$	$= Q^2$	**(carica elettrica)^2**
β-23) Δ_S/Δ_T	$[\,l\ t^{-1}]$	$=[\,l\ t^{-1}]$	$= Q/\Phi$	**v (velocità)**
β-24) Δ_U/Δ_S	$[\,l^{-1}\ u\,]$	$=[\,l\ m\ t^{-2}]$	$= Q{*}K = \Phi{*}H$	**F (forza)**
β-25) Δ_U/Δ_T	$[\,t^{-1}\ u\,]$	$=[\,l^2 m\ t^{-3}]$	$= Q{*}H$	**P (potenza)**

Come conseguenza si può definire il:

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE GENERALE MP

Espresso come:

$$\beta\text{-}26)\quad \Delta_S{*}\Delta_T{*}\Delta_U \geq z = \text{costante}$$

La β-26) è il prodotto di tre **Δ**, cioè una specie di "volume", che può essere equiparato a quello di una sfera ed è, pertanto, proporzionale ad un opportuno "raggio" elevato al cubo, ovvero ad un "volume cubico", di cui è proporzionale al "lato", anch'esso elevato al cubo.

Si è già visto che $\Delta_U{*}\Delta_S$ ha le dimensioni di una carica elettrica al quadrato, quindi si può assumere che sia proporzionale ad $\mathbf{e}^2$ (**e** = carica dell'elettrone).

$\Delta_U{*}\Delta_T$, invece, come si è notato, ha le dimensioni della costante di Planck (**h**).

Dalle:

β-12) Δ_U $[\,l^2 m\ t^{-2}]$	**h * frequenza**	$\geq \hat{c}_U{*}h{*}f$	$= \hat{c}_U{*}h{*}f$
β-13) Δ_T $[\,t\,]$	**periodo**	$\geq \hat{c}_T{*}T$	$= \hat{c}_T{*}f^{-1}$
β-14) Δ_S $[\,l\,]$	**lunghezza d'onda**	$\geq \hat{c}_S{*}\lambda$	$= \hat{c}_S{*}v{*}f^{-1}$

se, in luogo di **v**, si scrive **c** (velocità della luce nel vuoto) e si adotta, come valore di **Q** (nella β-22), la carica **e** dell'elettrone, si ricavano le:

β-27) $\Delta_U{*}\Delta_S$	$\geq \hat{c}_S{*}h{*}v$	$= \hat{c}_0{*}h{*}c$	$= Q^2$	$= \hat{c}_1{*}e^2$
β-28) $\Delta_U{*}\Delta_T$	$\geq \hat{c}_T{*}h$	$= \hat{c}_1{*}\hat{c}_T{*}e^2/(\hat{c}_0{*}c)$	(***h*** *dalla β-27)*	$= \hat{c}_2{*}e^2{*}c^{-1}$
β-29) $\Delta_T{*}\Delta_S$	$\geq \hat{c}_T{*}\hat{c}_S{*}v{*}f^{-2}$	$= \hat{c}_3{*}c{*}f^{-2}$	(***c*** *dalla β-27)*	$= \hat{c}_4{*}e^2{*}f^{-2}{*}h^{-1}$

I prodotti $\Delta_U{*}\Delta_S$, $\Delta_U{*}\Delta_T$, $\Delta_T{*}\Delta_S$, come indicano i loro pedici, riguardano, rispettivamente, i "piani" **U-S**, **U-T** e **T-S**, e definiscono "superfici" che possono essere equiparate a quelle di cerchi, i cui raggi valgono:

β-30) $\Delta_U * \Delta_S \rightarrow$ **area ≥ $\hat{c}_0 * h * c$ = $\hat{c}_1 * e^2$** $\rightarrow$ **raggio ≥ $e * (\hat{c}_1 * \pi^{-1})^{1/2}$**
β-31) $\Delta_U * \Delta_T \rightarrow$ **area ≥ $\hat{c}_T * h$ = $\hat{c}_2 * e^2 * c^{-1}$** $\rightarrow$ **raggio ≥ $e * (\hat{c}_2 * \pi^{-1} * c^{-1})^{1/2}$**
β-32) $\Delta_T * \Delta_S \rightarrow$ **area ≥ $\hat{c}_3 * c * f^{-2}$ = $\hat{c}_4 * e^2 * f^{-2} * h^{-1}$** $\rightarrow$ **raggio ≥ $e * f^{-1} * (\hat{c}_4 * \pi^{-1} * h^{-1})^{1/2}$**

IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE GENERALE MP diventa, così:

β-33) $\Delta_S * \Delta_T * \Delta_U \geq \hat{c}_0 * \hat{c}_T * h * c * f^{-1} = \hat{c}_6 * e^2 * f^{-1}$ (essendo: $h * c = e^2 * \hat{c}_1 * \hat{c}_0^{-1}$)

Il "raggio" Δ_{STU} del "volume" considerato sferico vale, pertanto :

β-34) $\Delta_{STU} \geq (\frac{3}{4}\, \hat{c}_6 * e^2 * f^{-1} * \pi^{-1})^{1/3} = (^3/_2 * \hat{c}_6 * e^2 * {}^1/_2 * \pi^{-1} * f^{-1})^{1/3} = \hat{c}_7 * (e^2 * \omega^{-1})^{1/3}$

Oppure, essendo $e^2 = h * c * \hat{c}_0 * \hat{c}_1^{-1}$:

β-35) $\Delta_{STU} \geq \hat{c}_8 * (h * c * \omega^{-1})^{1/3}$

con **ω** (pulsazione o velocità angolare), pari a $2 * \pi * f$.

È importante notare che:
ω È UN PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA ROTAZIONE.
Inoltre:
Secondo (β-33) **il PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE GENERALE MP il prodotto delle incertezze di Spazio, Tempo ed Energia è almeno pari ad UNA COSTANTE** (dimensionale) **DIVISA PER UNA FREQUENZA.**

Una particella soggetta a tale principio si comporterebbe, praticamente, come una palla (con dimensioni dipendenti dalla frequenza) fatta di gomma sottilissima ed estremamente elastica, piena d'acqua e sospesa a mezz'altezza in una vasca d'acqua. Schiacciandola, la palla si deforma e si allarga, tanto più quanto più viene schiacciata. Poiché la quantità d'acqua in essa contenuta è sempre la stessa, il suo volume rimane costante, ma il suo aspetto può cambiare moltissimo.

CONCLUSIONI

- Per principio di indeterminazione di Heisemberg è stata dimostrata la validità lungo ciascuno dei tre classici assi dello Spazio. Esistono, infatti, tre componenti dello Spazio: **Sx**, **Sy** ed **Sz** (di solito chiamate semplicemente: **x, y** e **z)**, per ciascuna delle quali vale il suddetto principio. È, tuttavia, ipotizzabile che, anche per il Tempo, esistano tre componenti: **Tx**, **Ty** e **Tz**. Per l'Energia esisteranno, di conseguenza, altre tre componenti: **Ux**, **Uy** ed **Uz**. In totale nove componenti dimensionali: **3** per lo **Spazio**, **3** per il **Tempo** e **3** per l'**Energia**.

- Poiché **ω** è un parametro caratteristico della rotazione e nelle β-12), β-13) e β-14) appaiono frequenza, periodo e lunghezza d'onda, nasce spontanea l'ipotesi che **f**, **T** e **λ** possano riferirsi allo stesso fenomeno: **una rotazione a velocità angolare ω**.

γ) IL DOMINIO A NOVE DIMENSIONI

Nel paragrafo precedente si è parlato di un dominio **S-T-U** a 9 dimensioni; adesso vediamo quali caratteristiche possiede. Per iniziare prendiamo in esame un sistema di coordinate ortogonali, che chiameremo, rispettivamente, **S**, **T** ed **U.**

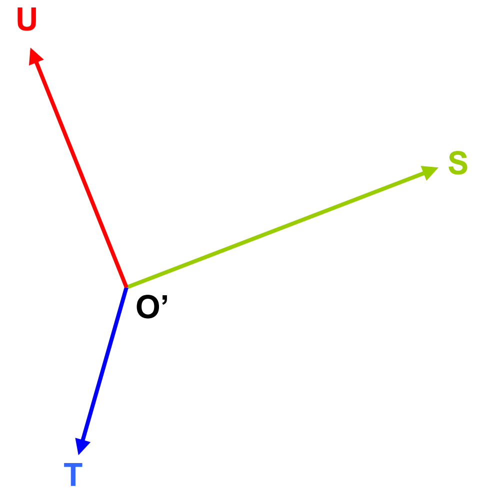

Fig. γ-F01

Consideriamo, poi, un vettore **R,** che parta dall'origine **O'** di tali coordinate.

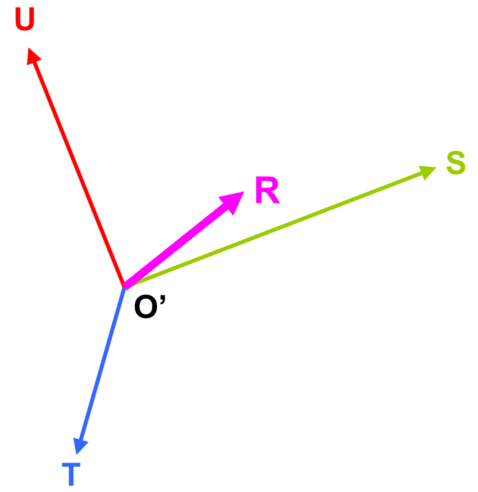

Fig. γ-F02

Il vettore **R** si proietta su ciascuno dei tre piani coordinati (**S-T**, **T-U** ed **U-S**) ed ognuno dei tre vettori-proiezione ($\mathbf{R_{ST}}$, $\mathbf{R_{TU}}$ ed $\mathbf{R_{US}}$) si proietta, a sua volta, su due assi coordinati, dando luogo a tre vettori risultanti, i quali rappresentano la scomposizione del vettore **R** secondo gli assi coordinati **S, T** ed **U**; li chiameremo, rispettivamente, **ΔS**, **ΔT** e **ΔU**.

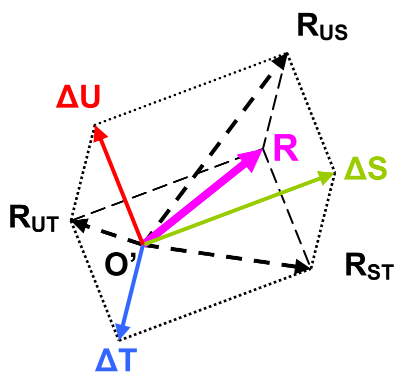

Fig. γ-F03

È da notare che i vettori-proiezione $\mathbf{R}_{ST}$, $\mathbf{R}_{TU}$ ed $\mathbf{R}_{US}$ contengono, ciascuno, informazioni relative a due dei vettori risultanti dalla scomposizione di **R** secondo i tre assi principali (**S**, **T** ed **U**).
L'intero sistema di riferimento **S-T-U** si suppone, a sua volta, inserito con orientamento generico in un altro sistema ortogonale di riferimento, i cui assi coordinati chiameremo, rispettivamente, **x**, **y** e **z** (Fig. γ-F04).

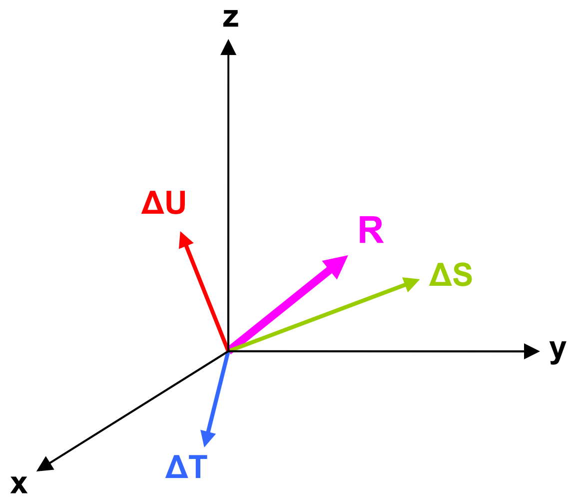

Fig. γ-F04

Le origini dei due sistemi di riferimento possono essere considerate coincidenti, come in Fig. γ-F04, ma ammettiamo, per maggiore chiarezza grafica, che non lo siano (Fig. γ-F05).

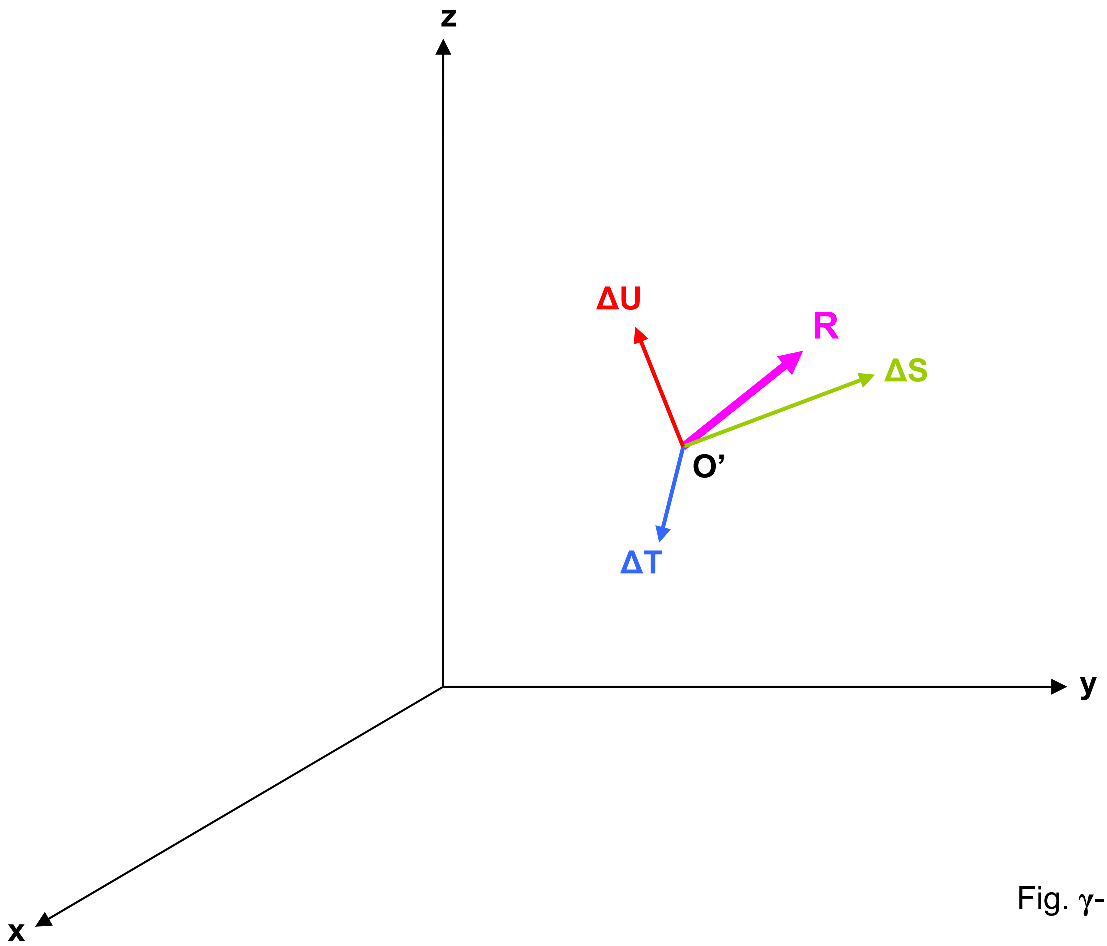

Fig. γ-F05

I tre assi ortogonali **x**, **y** e **z** sono utilizzati, tradizionalmente, per definire coordinate spaziali; nel nostro caso, invece, sono definiti semplicemente come “assi secondari”, mentre il ruolo di “assi principali” viene assunto da **S** (Spazio), **T** (Tempo) ed **U** (Energia).

ΔS , **ΔT** e **ΔU** rappresentano differenze di coordinate principali:

$$\gamma\text{-01)}\quad \mathbf{\Delta S = S_1 - S_0}$$
$$\gamma\text{-02)}\quad \mathbf{\Delta T = T_1 - T_0}$$
$$\gamma\text{-03)}\quad \mathbf{\Delta U = U_1 - U_0}$$

Analogamente a quanto esposto riguardo al vettore **R** nel sistema di coordinate **S-T-U,** nel nuovo sistema di coordinate **x**, **y**, **z c**iascuna delle differenze di coordinate principali può essere, a sua volta, scomposta secondo gli assi secondari, dando luogo a tre nuovi vettori, che chiameremo rispettivamente, **ΔSx**, **ΔSy**, **ΔSz**, **ΔTx**, **ΔTy**, **ΔTz**, **ΔUx**, **ΔUy**, **ΔUz**: in totale 9 vettori (Fig. γ-F06, Fig. γ-F07 e Fig. γ-F08).

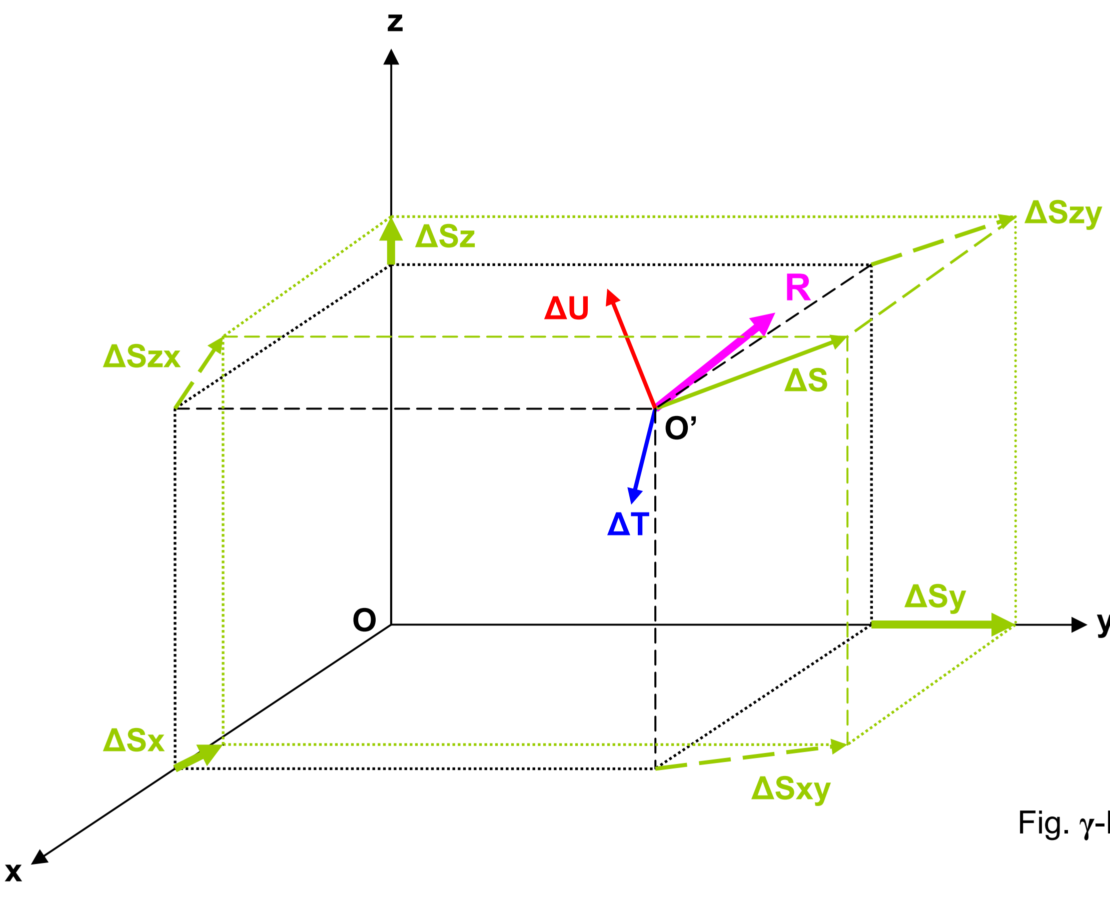

Fig. γ-F06

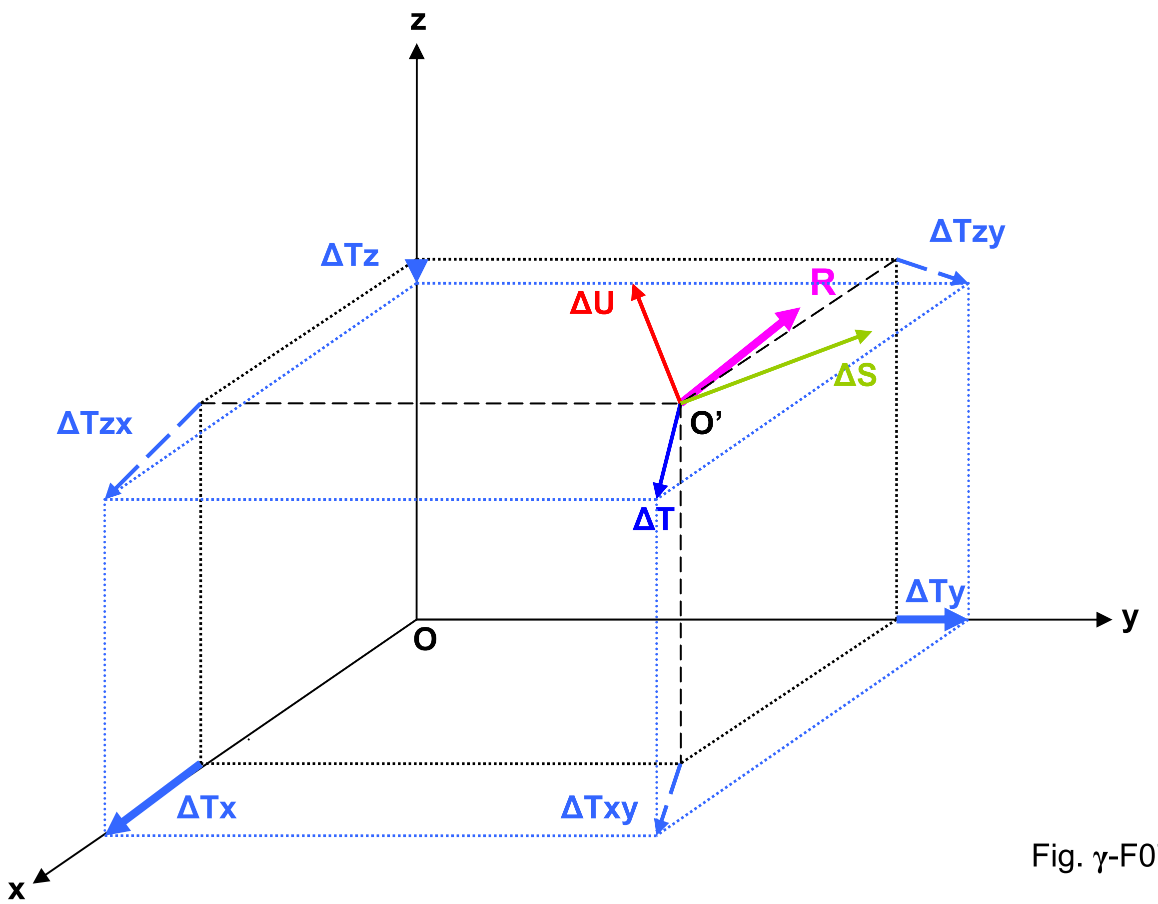

Fig. γ-F07

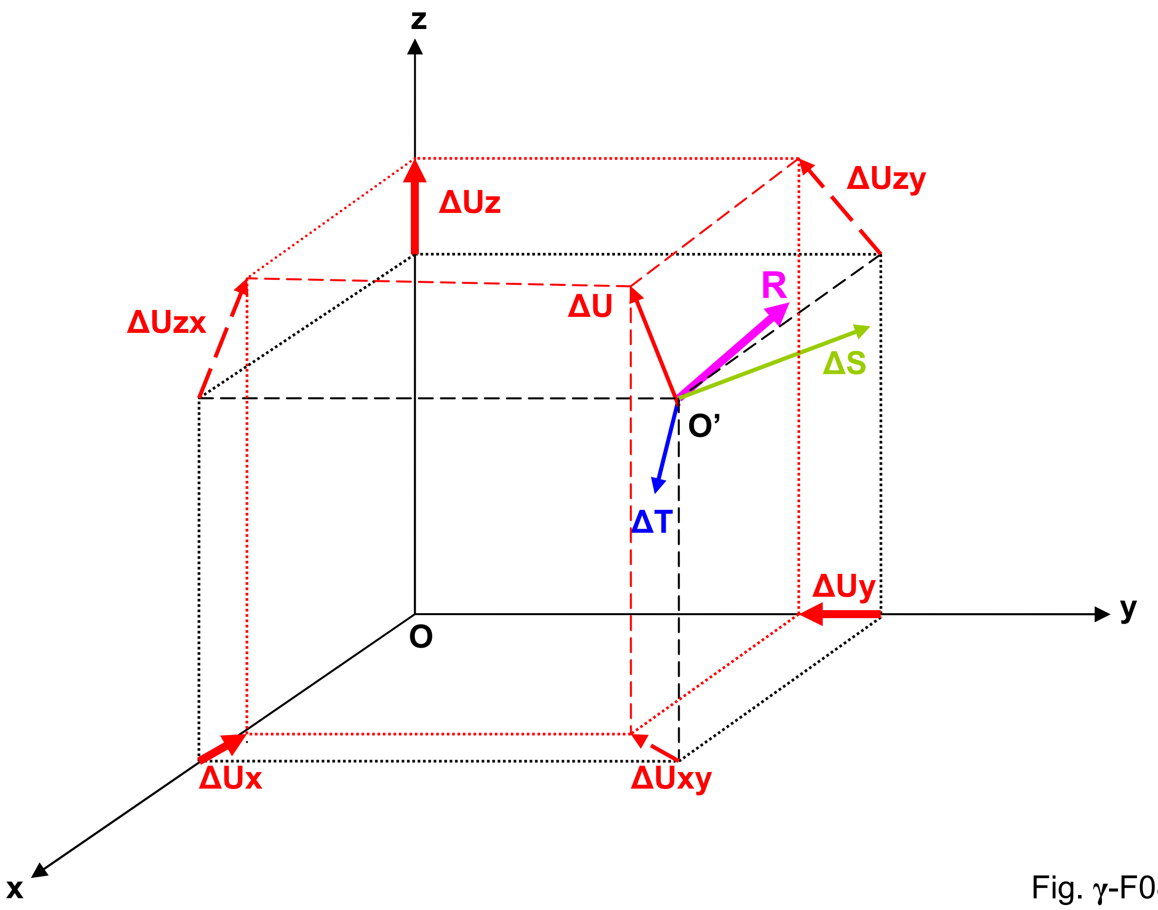

Fig. γ-F08

Secondo ciascuno degli assi **x**, **y** e **z** si sommeranno tre di tali vettori, dando luogo, rispettivamente, a:

$$\gamma\text{-04)}\quad \mathbf{\Delta Sx + \Delta Tx + \Delta Ux = \Delta x}$$

$$\gamma\text{-05)}\quad \mathbf{\Delta Sy + \Delta Ty + \Delta Uy = \Delta y}$$

$$\gamma\text{-06)}\quad \mathbf{\Delta Sz + \Delta Tz + \Delta Uz = \Delta z}$$

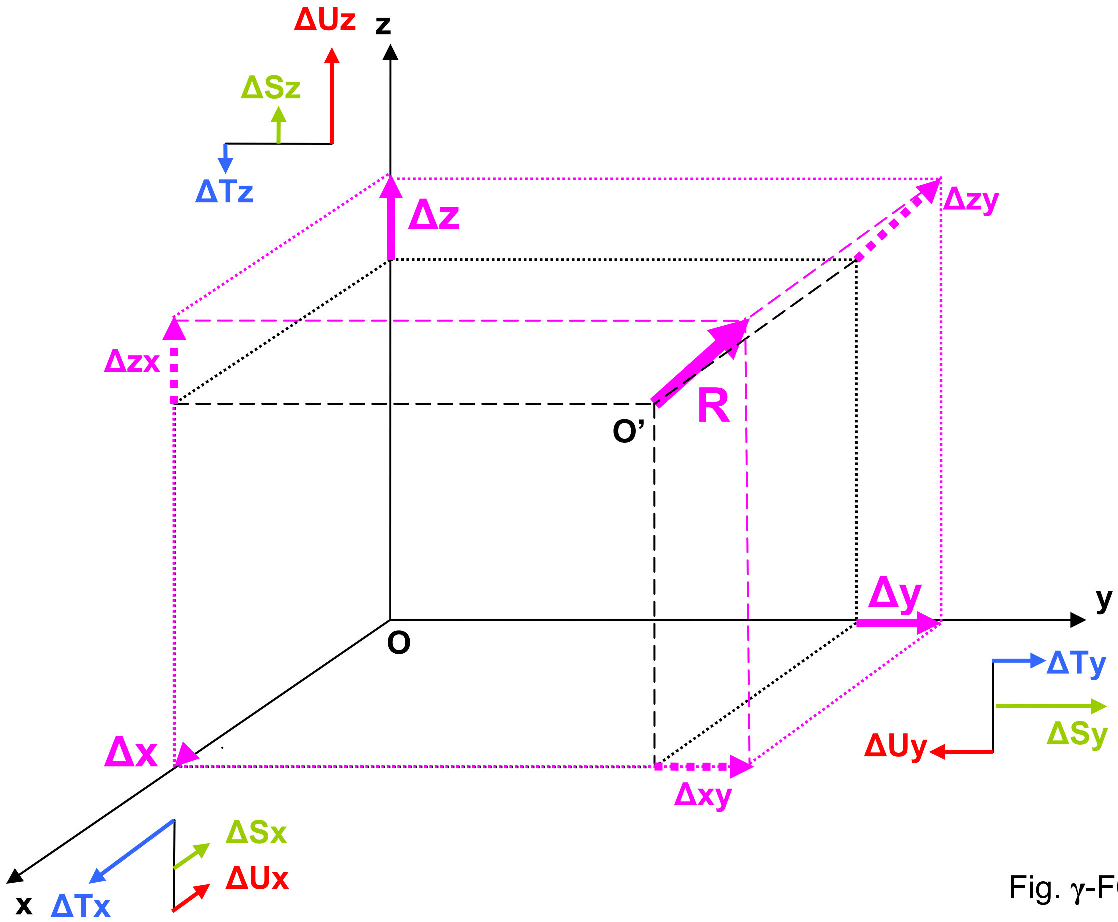

Fig. γ-F09

Perché, poi, **ΔS**, **ΔT** e **ΔP** (Fig. γ-F02, sotto riportata per comodità) siano reciprocamente ortogonali deve valere la:

$$\gamma\text{-07)}\quad \mathbf{R^2 = \Delta S^2 + \Delta T^2 + \Delta U^2}$$

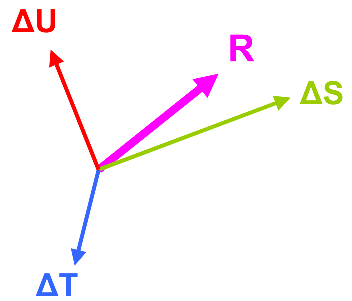

Fig. γ-F02

ovvero, per esteso, la:

$$\gamma\text{-08)}\quad \mathbf{R^2 = (S_1 - S_0)^2 + (T_1 - T_0)^2 + (U_1 - U_0)^2}$$

Ciascuna differenza di coordinate principali, come si è detto, viene scomposta secondo gli assi secondari, dando luogo a 3 differenze di coordinate secondarie:

γ-09) $\Delta Sx = Sx_1 - Sx_0$ γ-12) $\Delta Tx = Tx_1 - Tx_0$ γ-15) $\Delta Ux = Ux_1 - Ux_0$

γ-10) $\Delta Sy = Sy_1 - Sy_0$ γ-13) $\Delta Ty = Ty_1 - Ty_0$ γ-16) $\Delta Uy = Uy_1 - Uy_0$

γ-11) $\Delta Sz = Sz_1 - Sz_0$ γ-14) $\Delta Tz = Tz_1 - Tz_0$ γ-17) $\Delta Uz = Uz_1 - Uz_0$

Per queste, essendo **x**, **y** e **z** assi ortogonali, valgono le:

$$\gamma\text{-18)}\quad \Delta Sx^2 + \Delta Sy^2 + \Delta Sz^2 = \Delta S^2$$
$$\gamma\text{-19)}\quad \Delta Tx^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Tz^2 = \Delta T^2$$
$$\gamma\text{-20)}\quad \Delta Ux^2 + \Delta Uy^2 + \Delta Uz^2 = \Delta U^2$$

Quindi:

$$\gamma\text{-21)}\quad R^2 = \Delta S^2+\Delta T^2+\Delta U^2 = \Delta Sx^2+\Delta Sy^2+\Delta Sz^2+\Delta Tx^2+\Delta Ty^2+\Delta Tz^2+\Delta Ux^2+\Delta Uy^2+\Delta Uz^2$$

Inoltre, come abbiamo detto, le componenti secondarie di **ΔS**, **ΔT** e **ΔU** si sommano anche lungo ciascuno degli assi **x**, **y** e z, dando origine alla:

$$\gamma\text{-22)}\quad R^2 = (\Delta Sx + \Delta Tx + \Delta Ux)^2 + (\Delta Sy + \Delta Ty + \Delta Uy)^2 + (\Delta Sz + \Delta Tz + \Delta Uz)^2$$

ovvero, scritta per esteso, alla:

$$\begin{aligned}\gamma\text{-23)}\quad R^2 = {} & [(Sx_1 - Sx_0) + (Tx_1 - Tx_0) + (Ux_1 - Ux_0)]^2 + \\ & + [(Sy_1 - Sy_0) + (Ty_1 - Ty_0) + (Uy_1 - Uy_0)]^2 + \\ & + [(Sz_1 - Sz_0) + (Tz_1 - Tz_0) + (Uz_1 - Uz_0)]^2\end{aligned}$$

Di conseguenza dovranno valere, contemporaneamente, ambedue le:

$$\gamma\text{-21)}\quad R^2 = \Delta Sx^2 + \Delta Sy^2 + \Delta Sz^2 + \Delta Tx^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Tz^2 + \Delta Ux^2 + \Delta Uy^2 + \Delta Uz^2$$

$$\gamma\text{-22)}\quad R^2 = (\Delta Sx + \Delta Tx + \Delta Ux)^2 + (\Delta Sy + \Delta Ty + \Delta Uy)^2 + (\Delta Sz + \Delta Tz + \Delta Uz)^2$$

delle quali la seconda, scritta per esteso, diventa:

$$\begin{aligned}\gamma\text{-24)}\quad R^2 = {} & \Delta Sx^2 + \Delta Tx^2 + \Delta Ux^2 + 2{*}\Delta Sx{*}\Delta Tx + 2{*}\Delta Sx{*}\Delta Ux + 2{*}\Delta Tx{*}\Delta Ux + \\ & + \Delta Sy^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Uy^2 + 2{*}\Delta Sy{*}\Delta Ty + 2{*}\Delta Sy{*}\Delta Uy + 2{*}\Delta Ty{*}\Delta Uy + \\ & + \Delta Sz^2 + \Delta Tz^2 + \Delta Uz^2 + 2{*}\Delta Sz{*}\Delta Tz + 2{*}\Delta Sz{*}\Delta Uz + 2{*}\Delta Tz{*}\Delta Uz\end{aligned}$$

e, combinata con la prima, dà:

$$\begin{aligned}\gamma\text{-25)}\quad & \Delta Sx^2 + \Delta Sy^2 + \Delta Sz^2 + \Delta Tx^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Tz^2 + \Delta Ux^2 + \Delta Uy^2 + \Delta Uz^2 = \\ & = \Delta Sx^2 + \Delta Tx^2 + \Delta Ux^2 + 2{*}\Delta Sx{*}\Delta Tx + 2{*}\Delta Sx{*}\Delta Ux + 2{*}\Delta Tx{*}\Delta Ux + \\ & + \Delta Sy^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Uy^2 + 2{*}\Delta Sy{*}\Delta Ty + 2{*}\Delta Sy{*}\Delta Uy + 2{*}\Delta Ty{*}\Delta Uy + \\ & + \Delta Sz^2 + \Delta Tz^2 + \Delta Uz^2 + 2{*}\Delta Sz{*}\Delta Tz + 2{*}\Delta Sz{*}\Delta Uz + 2{*}\Delta Tz{*}\Delta Uz\end{aligned}$$

da cui si deduce che la somma dei prodotti misti è uguale a zero:

$$\gamma\text{-26)}\quad \mathbf{\Delta Sx{*}\Delta Tx+\Delta Sx{*}\Delta Ux+\Delta Tx{*}\Delta Ux+\Delta Sy{*}\Delta Ty+\Delta Sy{*}\Delta Uy+ \\ +\Delta Ty{*}\Delta Uy+\Delta Sz{*}\Delta Tz+\Delta Sz{*}\Delta Uz+\Delta Tz{*}\Delta Uz = 0}$$

Quest'ultima equazione, insieme, ad esempio, alla prima delle due iniziali, compone il sistema di due equazioni che debbono essere contemporaneamente soddisfatte in ogni punto del dominio:

$$\gamma\text{-22)}\quad \mathbf{R^2 = (\Delta Sx + \Delta Tx + \Delta Ux)^2 + (\Delta Sy + \Delta Ty + \Delta Uy)^2 + (\Delta Sz + \Delta Tz + \Delta Uz)^2}$$

$$\gamma\text{-26)}\quad \mathbf{0 = \Delta Sx{*}\Delta Tx + \Delta Sx{*}\Delta Ux + \Delta Tx{*}\Delta Ux + \Delta Sy{*}\Delta Ty + \Delta Sy{*}\Delta Uy + \\ + \Delta Ty{*}\Delta Uy + \Delta Sz{*}\Delta Tz + \Delta Sz{*}\Delta Uz + \Delta Tz{*}\,\Delta Uz}$$

Perché siano verificate ambedue, occorre, in conclusione, che:

$$\gamma\text{-27)}\quad \mathbf{\Delta Sx^2 + \Delta Tx^2 + \Delta Ux^2 + \Delta Sy^2 + \Delta Ty^2 + \Delta Uy^2 + \Delta Sz^2 + \Delta Tz^2 + \Delta Uz^2 = R^2}$$

la quale garantisce l'ortogonalità sia degli assi principali sia di quelli secondari qualunque sia il loro orientamento reciproco ed è di per sé evidente, infatti può essere scritta come segue (γ-21):

$$\gamma\text{-21)}\quad \mathbf{(\Delta Sx^2+\Delta Tx^2+\Delta Ux^2)+(\Delta Sy^2+\Delta Ty^2+\Delta Uy^2)+(\Delta Sz^2+\Delta Tz^2+\Delta Uz^2) = \Delta S^2+\Delta T^2+\Delta U^2 = R^2}$$